**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Теория функций вещественного переменного: дополнительные главы и приложения

Theory of Functions of Real Variable: Special Topics and Applications

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 051669

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Сообщить дополнительные сведения по теории функций вещественной переменной и теории меры, необходимые для специализации в области теории функций и функционального анализа. Формирование у обучающихся навыков научной работы.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсом «Математический анализ», «Функциональный анализ».

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Обучающийся должен овладеть теоретическим материалом в объеме, предусмотренном программой, уметь применять полученные знания при решении теоретических и прикладных задач в области вещественного анализа и теории меры.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Самостоятельная работа: индивидуальное изучение методических материалов и рекомендованной литературы.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 6 | 30 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 8 |  | 30 | 2 |
|  | 2-100 |  | 2-100 |  |  |  |  |  | 2-100 |  |  | 10-25 |  |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 30 |  | 2 |  |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 8 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 6 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

Период обучения: Семестр 6

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **№ п.п.** | **Наименование темы (раздела, части)** | **Вид учебных занятий** | **Кол-во часов** |
| 1 | Раздел 1. Внешние меры. Мера Хаусдорфа | лекции | 10 |
| самостоятельная работа в присутствии  преподавателя | 10 |
| 2 | Раздел 2. Инвариантные средние | лекции | 10 |
| самостоятельная работа в присутствии  преподавателя | 10 |
| 3 | Раздел 3. Максимальная функций | лекции | 10 |
| самостоятельная работа в присутствии  преподавателя | 10 |
| 4 | Промежуточная аттестация | консультации | 22 |
| самостоятельная работа | 82 |
| экзамен | 28 |
| **Итого** | | | **72** |

**Раздел 1**. Внешние меры. Мера Хаусдорфа

Предмера. Сужение предмеры на измеримые множества. Внешняя мера. Стандартное продолжение меры. Структура множеств, измеримых относительно стандартного продолжения меры. Теоремы о монотонном классе, единственности и минимальности стандартного продолжения меры. Метрическая внешняя мера. Борелевски регулярные внешние меры. Построение метрических внешних мер. Совпадение внешней меры с метрической внешней мерой. Произведение мер и мера Лебега. Мера Хаусдорфа. Свойства и мера куба. Вычисление нормировочной константы меры Хаусдорфа.

Размерность Хаусдорфа. Размерность Хаусдорфа графика функции. Связь длины и одномерной меры Хаусдорфа. Формулы площади и коплощади.

**Раздел 2. Инвариантные средние.**

Лемма Холла. Лемма о минимальных ε-сетях. Произведение метрических компактов. Существование меры Хаара. Метризация группы изометрий. Единственность меры Хаара. Мера Хаара на Грассмановом многообразии. Следствие об интегрировании функций на сфере. Инвариантные средние. Псевдоразрешимые семейства. Примеры. Теорема Маркова—Какутани. Свойства инвариантных средних. Аменабельные группы. Теорема фон Неймана. Конечно-аддитивные функции подмножеств аменабельной группы. Теоремы Банаха. Теорема фон Неймана о неаменабельности свободной группы. Группы SO(n). Аменабельность дискретной и топологической групп. Парадоксальные множества. Теорема Хаусдорфа. Инвариантные меры на компакте. Теоремы Крылова—Боголюбова. Банахов предел.

**Раздел 3. Максимальная функция.**

Максимальная функция. Теорема Безиковича о покрытии. Функция распределения. Оценка слабого типа 1--1 для максимального оператора. Теорема о максимальном операторе в пространстве *Lp*(*Rⁿ*) при p>1. Дифференцируемость интеграла от локально суммируемой функции. Точки плотности. Теорема о точках Лебега локально суммируемой функции. Регулярные семейства множеств. Теорема Лебега о разложении меры. Теорема о дифференцировании регулярной меры. Производная монотонной функции.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению лекций, участию в обсуждении вопросов, подготовленных к занятию, самостоятельной работе, включающей в себя чтение специальной литературы по разделам темы, подготовка презентаций по тематике курса.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена категорически запрещено. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт и обучающийся удаляется с экзамена. После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

Критерии выставления оценок

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя).

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание основных вопросов по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный список вопросов к экзамену:

1. Предмера. Сужение предмеры на измеримые множества.

2. Внешняя мера. Стандартное продолжение меры. Структура множеств, измеримых относительно стандартного продолжения меры.

3. Теоремы о монотонном классе, единственности и минимальности стандартного продолжения меры. Метрическая внешняя мера. Свойства.

4. Борелевски регулярные внешние меры. Построение метрических внешних мер. Совпадение внешней меры с метрической внешней мерой. Произведение мер и мера Лебега.

5. Мера Хаусдорфа. Свойства и мера куба. Вычисление нормировочной константы меры Хаусдорфа.

6. Размерность Хаусдорфа. Размерность Хаусдорфа графика функции.

7. Связь длины и одномерной меры Хаусдорфа. Формулы площади и коплощади.

8. Лемма Холла. Лемма о минимальных ε-сетях. Произведение метрических компактов.

9. Существование меры Хаара. Метризация группы изометрий.

10. Единственность меры Хаара. Носитель меры Хаара.

11. Мера Хаара на Грассмановом многообразии. Следствие об интегрировании функций на сфере.

12. Инвариантные средние. Псевдоразрешимые семейства. Примеры. Теорема Маркова—Какутани. Свойства инвариантных средних.

13. Аменабельные группы. Теорема фон Неймана.

14. Конечно-аддитивные функции подмножеств аменабельной группы.

15. Теоремы Банаха.

16. Теорема фон Неймана о неаменабельности свободной группы. Группы SO(n).

17. Аменабельность дискретной и топологической групп.

18. Теорема Хаусдорфа. Инвариантные меры на компакте.

19. Теоремы Крылова—Боголюбова.

20. Теорема Безиковича о покрытии. Функция распределения.

21. Оценка слабого типа 1--1 для максимального оператора. Следствия. Теорема о максимальном операторе в пространстве *Lp*(*Rⁿ*) при p>1. Следствие.

22. Дифференцируемость интеграла от локально суммируемой функции. Точки плотности.

23. Теорема о точках Лебега локально суммируемой функции. Регулярные семейства множеств.

24.Теорема Лебега о разложении меры. Теорема о дифференцировании регулярной меры. Производная монотонной функции.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К проведению занятий должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком обучающихся.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Доска для письма мелом или фломастером.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел — не менее 1 куска на час лекционных занятий, фломастеры для доски, губка.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Богачев В.И. Основы теории меры, Том 1. Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2006.

2. Богачев В.И. Основы теории меры, Том 2. Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2006.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., Мир, 1973.

2. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М., Мир, 1973.

3. Chavel I. Isoperimetric Inequalities. Cambridge University Press, 2001.

4. Milman V., Schechtman G. Asymptotic Theory of Finite Dimension Normed Spaces. Lecture Notes in Mathematics No 1200, Springer, 1986.

5. Runde V. Lectures on amenability. Lecture Notes in Mathematics No 1774, Springer, 2002.

6. Wagon S. The Banach–Tarski paradox. Cambridge University Press, 1993.

7. Friedman A. Foundations of modern analysis. Dover, New York, 1970.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не требуется.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Баранов Антон Дмитриевич, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры математического анализа, a.d.baranov@spbu.ru